ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ

1. Για τις συναρτήσεις fκαι g ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = f(\pi - x)\ και$
$g(x) + g(\pi - x) = \pi$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - \psi$ να αποδείξετε ότι: $\int_0^\pi f(x) \cdot g(x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)dx$ στην συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x\cdot\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot dx$.

[Π.2006.]

2. α)Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

β) Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παράγωγο στο [0,2] για την οποία ισχύει $\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt = \int_0^2 f'(x)dx - ln(1+e)$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (0,2)$ για τον οποίο ισχύει $2f'(\xi) - 1 = ln\,2$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις fκαι g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με $f(-x) = f(x)$ και $g(x) + g(-x) = 1$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \int_0^\alpha f(x) \cdot dx$ α > 0 .

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x}+1}dx$

[Π.2008.]

4. Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει: $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ και $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x) + f''(x)]\sigma\upsilon\nu x dx = 2$. Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

[Π.2008.]

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to (0, \infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν $f'(2) = 0, f(0) = 1$και $\frac{1}{2}\int_0^2 x \cdot f''(x)dx + \frac{3}{2}\int_0^2 f'(x)dx = 3$
α) Να δείξετε ότι $f(2) = 4$.
β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό, $u = f(x)$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $A = \int_0^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)+5f(x)+6}dx$

[Π.2011]

6. Για τις συνεχείς συναρτήσεις fκαι g ισχύει $f(x) + f(-x) = g(x)$, $\forall x \in R$.
Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -u$ να δειχθεί ότι $\int_{-a}^{a} f(x) \cdot dx = \int_0^a g(x) \cdot dx$. Στην συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+3^x} \cdot dx$.

[Π.2013.]

7. α)Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = a + \beta - u$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) \cdot dx$

β) Να δείξετε ότι$\int_0^1 \frac{ln(x+3)}{ln(x+3)+ln(4-x)} \cdot dx = \frac{1}{2}$

γ) Αν $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x+1}$ να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = x^2 + 1, \forall x \in R$ και $\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \frac{4}{3}$.

[Π.2015.]

8. Τ είναι το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ την ευθεία $\psi = x + 1$ και τον άξονα των χ.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του Τ.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου Τ γύρω από τον άξονα των χ .

9. α) Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - u$, να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x) \cdot dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x) \cdot dx$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \eta\mu x}{8+\eta\mu^2 x} \cdot dx$.

[Π.2017.]

10. Τ είναι το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi^2 + x^2 = 4$ και $\psi^2 = 3x$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου Τ γύρω από τον άξονα των χ .

11. Τ είναι το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = e^{x+1}$ την εφαπτομένη της στο σημείο της $(1, e^2)$ και τον άξονα των ψ .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του Τ .

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου Τ γύρω από τον άξονα 1)των χ 2)των ψ.

12. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του α έτσι ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\psi = \alpha^2 x^2 + \alpha x + 1$ τον άξονα$x'x$, $\psi\psi'$και την $x = 1$ να είναι ελάχιστο.

13. Να βρείτε την $f(x)$ για τη οποία ισχύει $\int_0^1 f(x) \cdot e^{1-x} \cdot dx = f(x) - e^{1-x}$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to (0, \infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x = 2$,$f(0) = 1$ και $\int_0^2 [x \cdot f''(x) + 3f'(x)]dx = 6$. Να υπολογίσετε το $f(2)$ και να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \frac{3}{2}$.

15. Αν $f'(x) = f^2(x)$ και $f(1) = 2f(0)$, να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx = ln\, 2$

16. Δίνονται τα ολοκληρώματα $A = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx$ και $B = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)} dx$

α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό, $u = a - x$, να δείξετε ότι A= B

β) Να υπολογίσετε το A

γ) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\Gamma = \int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+2e^x+e} dx$

[Π.2012.]

17. Αν $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x} dx$ και $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1+2\eta\mu x} dx$ να υπολογίσετε τα A, A+B και B.

[Π.2010.]

18. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο R με τις ιδιότητες:

i) Η f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο R.
ii) $f(-x) = f(x)$,$\forall x \in R$.
iii) $f(x+\alpha) = f(x)$,$\forall x \in R$.
iv) f (0) = 0.

Να αποδείξετε:

α) $f'(-x) = -f'(x)$,$\forall x \in R$

β) $f'(x+\alpha) = f'(x)$,$\forall x \in R$

γ) $\int_0^\alpha x^2 \cdot f'(x) \cdot dx = -2\int_0^\alpha x \cdot f(x) \cdot dx$

δ) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = a - \psi$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε: $2\int_0^\alpha x \cdot f(x) \cdot dx = \alpha \int_0^\alpha f(x) \cdot dx$

ε) Χρησιμοποιώντας το γ) και δ) να δείξετε ότι: $\int_0^\alpha x^2 \cdot f'(x) \cdot dx = -\alpha \int_0^\alpha f(x) \cdot dx$

[Π.2007.]

19. Δίνονται οι συναρτήσεις fκαι g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με$f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = -g(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

α) Να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} \cdot dx = \int_0^\alpha f(x) \cdot dx$

b) Να υπολογίσετε το$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+5}{2e^{\eta\mu x}+2} \cdot dx$

[Π.2016.]